②

رياضيات ٢

سلم تصحيح مقرر تحليل (٤)

لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الإضافية للعام ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول: 15

إذا كان N_1 و N_2 نظيمين على الفضاء المتجهي V ذاته، فإننا نقول أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان $\alpha>0$ و $\beta>0$ بحيث يكون:

$\alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x)$ وذلك أياً كان x من V. ⑦

بما أن النظيمين متكافئان فإن:

$\alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x) \quad ; \forall x\in V$

وبالتالي فأياً كان x و y من V فإن: $\alpha N_1(x-y) \le N_2(x-y) \le \beta N_1(x-y)$

ومنه

$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y)$ ⑧

أي أن d_1 و d_2 متكافئان.

السؤال الثاني: 17

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2} \ (5) = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{4x} = \frac{1}{2} \ (5)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \ (5)$$

حسب نتيجة سابقة ليس للدالة f نهاية في النقطة $(0,0)$. ②

السؤال الثالث: 17

بما أن الدالة g مستمرة في النقطة $b=f(a)$، فيقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب ρ، بحيث إذا كان $y\in f(D)$ و $|y-b|<\rho$ فإن: $|g(y)-g(b)|<\varepsilon$. وبما أن الدالة f مستمرة في النقطة a، فيقابل العدد الحقيقي الموجب ρ عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $d(x,a)<\delta$، $x\in D$ ⑧

إن $\rho>|f(x)-f(a)|$ وبالتالي يقابل العدد ε عدد δ بحيث إذا كان $d(x,a)<\delta$ فإن $|f(x)-f(a)|<\rho$ ومنه $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$

وهذا يعني أن الدالة $g\circ f$ مستمرة في a. (9)

السؤال الرابع: [17]

ليكن E و F فضائين تجريبيين حقيقيين منظمين، ولتكن D مجموعة جزئية من E

و a نقطة داخلية من D، نقول عن الدالة: $f:D\to F,\ x\to f(x)$

أنها قابلة للمفاضلة حسب فريشيه في النقطة a، إذا وجد تطبيق خطي

مستمر $L:E\to F$ بحيث يكون:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|_E}\left[f(a+h)-f(a)-L(h)\right]=0$$

إذا كانت D مجموعة مفتوحة فإننا نقول عن الدالة f أنها قابلة للمفاضلة على D إذا كانت قابلة للمفاضلة في كل نقطة من D (6)

إذا كانت قابلة للمفاضلة في النقطة a من D فإنه توجد دالتان

بما أن f و g دالتين قابلتين للمفاضلة في النقطة a من D فإنه توجد دالتان ε_1 و ε_2 معرفتان على جوار W للنقطة 0 في E بحيث يكون:

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ ;\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$$

$$g(a+h)=g(a)+dg_a(h)+\|h\|\varepsilon_2(h)\ ;\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0 \quad (6)$$

وذلك أياً كان h من W، وبجمع المساواتين طرفاً إلى طرف نجد أن:

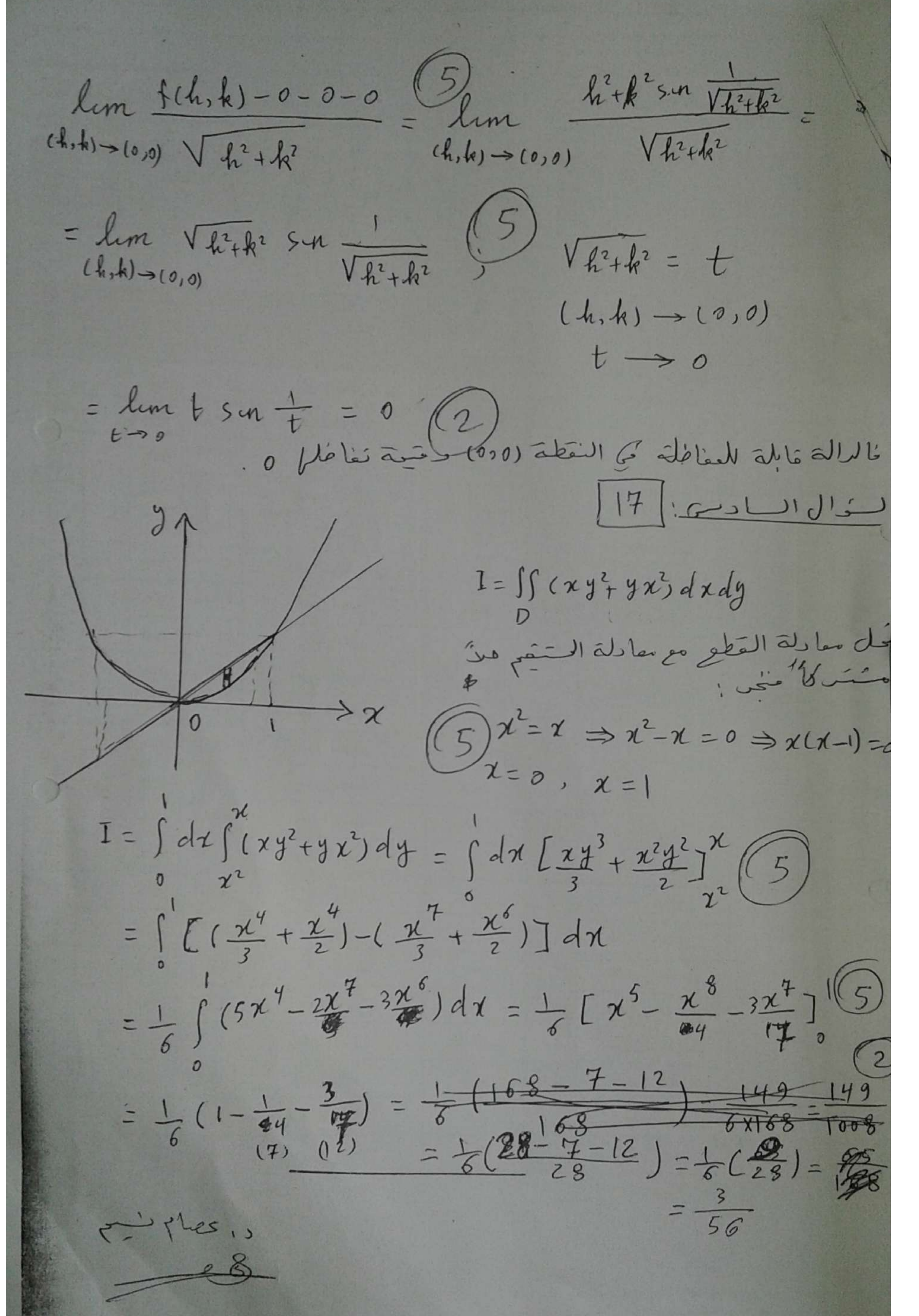
$$(f+g)(a+h)=(f+g)(a)+(df_a+dg_a)(h)+\|h\|(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)$$

بما أن df_a+dg_a تطبيقاً خطياً، و $\lim(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)=0$ فإننا نستنتج أن (5)

الدالة $f+g$ قابلة للمفاضلة في النقطة a، وأن $d(f+g)_a=df_a+dg_a$

السؤال الخامس: [17]

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0 \quad (5)$$



$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (5) \quad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2 \sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (5)$$

$\sqrt{h^2+k^2} = t$

$(h,k) \to (0,0)$

$t \to 0$

$$= \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{t} = 0 \quad (2)$$

فالدالة قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$ وقيمة تفاضلها 0 .

السؤال السادس: 17

$$I = \iint_D (xy^2 + yx^2)\,dx\,dy$$

نحل معادلة القطع مع معادلة المستقيم معاً مشتركاً كما يلي:

(5) $x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

$x = 0 \;,\; x = 1$

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (xy^2 + yx^2)\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} \quad (5)$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2}\right) - \left(\frac{x^7}{3} + \frac{x^6}{2}\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(5x^4 - 2x^7 - 3x^6\right) dx = \frac{1}{6}\left[x^5 - \frac{x^8}{4} - \frac{3x^7}{7}\right]_0^1 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{7}\right) \quad (2)$$

~~$= \frac{1}{6}\left(\frac{168-7-12}{168}\right) = \frac{149}{6\times168} = \frac{149}{1008}$~~

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{28-7-12}{28}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{28}\right) = \frac{3}{56}$$